***Exercice* 1**

La torsion uniforme d'une poutre prismatique de longueur unitaire et de section carrée Ω de côté $2a$ est régie par l'équation de Poisson et les conditions aux limites suivantes

$$\nabla^T \nabla \Phi(y, z) = \partial^2\Phi/\partial y^2 + \partial^2\Phi/\partial z^2 = -2G\theta \text{ dans } \Omega$$

$$\Phi(s) = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où la variable Φ dénote la fonction de contrainte ou d'Airy, les quantités G et θ désignent respectivement le module de glissement du matériau et l'angle de torsion unitaire et les coordonnées x, y et z correspondent successivement à l'axe de la poutre et aux deux directions principales, l'abscisse s parcourant le bord $\partial\Omega$ de la section Ω de référence. En retenant le quart $\Omega^* =]0, a[\times]0, a[$ de la section en vertu de sa double symétrie, rechercher la forme faible du problème.

***Exercice* 2**

Etablir la forme faible du problème suivant de transfert-chaleur par conduction dans un milieu bidimensionnel isotrope $\overline{\Omega} = \Omega \cup (\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$

$$u \in C^2(\overline{\Omega}) : \nabla^T[-\kappa\nabla u(x, y)] = q \qquad \text{dans } \Omega$$

$$-\kappa \partial u/\partial n = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_1$$

$$-\kappa \partial u/\partial n = \alpha \qquad \text{sur } \partial\Omega_2$$

où u désigne la température, κ est le coefficient constant de conductibilité thermique et q est un flux constant d'énergie-chaleur, tandis que α est un coefficient constant. Le domaine Ω est constitué de la région intérieure à un cercle de rayon $2R$ (frontière $\partial\Omega_1$) et extérieure à un cercle de rayon R (frontière $\partial\Omega_2$), alors que n dénote la direction de la normale extérieure à la frontière. A partir de la forme faible trouvée, rechercher le coefficient α pour que le problème ait un sens et justifier le résultat obtenu.